L1

ASSIGNMENT #2

1.

a). PROOF:

$\forall x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 由 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 之定义. $\exists\ k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

capital K.

s.t.

$x \in A_k$. capital K.

由于 $A_k \subset A$.

故 $x \in A \quad \forall x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

即 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$. $\square$.

b) PROOF:

由于 A与B $\exists$ 一一对应. 不妨设 $\exists$ 一一映射

$\varphi: A \longrightarrow B$.

我们需要证明

① A为无限集 $\Longrightarrow$ B为无限集

② B 为无限集 $\Longrightarrow$ A 为无限集.

先证①. [②之证明类似].

假设 A 为无限集. 则 $\exists$ 一个单射

$$f: A \longrightarrow A.$$

使得

$$f(A) \subsetneqq A.$$

为了证明 B 为无限集. 需找到单射

$$g: B \longrightarrow B.$$

使得

$$g(B) \subsetneqq B.$$

事实上. 考虑如下

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\rho"'] & A \arrow[d, "\rho"] \\
B \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\rho^{-1}"'] & B
\end{tikzcd}.$$

$$g = \rho \circ f \circ \rho^{-1}.$$

我们定义

$$g = \rho \circ f \circ \rho^{-1}.$$

此时 ρ、ρ^{-1} 均为双射，故 ρ、ρ^{-1} 都为单射。

由于 f 为单射，我们有

$$g = \rho \circ f \circ \rho^{-1} \text{ 亦是单射.}$$

由于 $f(A) \subsetneq A$，$\exists\ a \in A$, s.t. $a \notin f(A)$.

断言：$\rho(a) \notin g(B)$.

断言之证明：若 $\rho(a) \in g(B)$，则 $\exists\ b \in B$, s.t.

$$\rho(a) = g(b).$$

换言之

$$\rho(a) = \rho \circ f \circ \rho^{-1}(b).$$

故

$$\rho^{-1} \circ \rho(a) = \rho^{-1} \circ \rho \circ f \circ \rho^{-1}(b).$$

即

$$a = f \circ \rho^{-1}(b) = f(\rho^{-1}(b)) \in f(A).$$

这与 $a \notin f(A)$ 矛盾.

基于上述断言，我们有 $\rho(a) \in B - f(B)$，从而

$$f: B \longrightarrow B$$

是单射，但不是满射，故 B 为无限集。

至此，我们证明了

“若 A 为无限集，则 B 为无限集”。

类似地，我们可证

“若 B 为无限集，则 A 为无限集”。

证毕。 □

c) 和 d)

PROOF:

c) 与 d) 之证明在课件中已经给出，参见 [Part 1] 集合论 中

第 54 页之“习题解答”。

关于 c) 和 d) 之证明（课件中给了大体思路和大部分细节）的问题，可以答疑时间来问我。

e). PROOF:

若 C 为可数集. 不妨设 $C = \mathbb{N}$ (当然: 一般的可数集只是与 $\mathbb{N}$ 有一一对应. 未必是 $\mathbb{N}$. 但是, 基于我们给出的关于 b) 之证明之思想. 如果两个集合有一一对应. 它们间很多性质是可以互相对应的).

在 $\mathbb{N}$ 中. 令

$$D = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

$$E = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$$

则 $D \cap E = \emptyset$.

$$D \sqcup E = C.$$

考虑

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow D$$

$$n \longmapsto 2n$$

和 $g: \mathbb{N} \longrightarrow E$

$$n \longmapsto 2n+1.$$

易验证 f 和 g 均为双射. 故

$$|D| = |E| = |\mathbb{N}|. \qquad \square$$

f). 由 d). $\exists$ 单射

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

则 $\cancel{\varphi(A)}$

$$|\varphi(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|.$$

且 $\varphi(\mathbb{N}) \subset A$.

由于 $A = \varphi(\mathbb{N}) \sqcup (A - \varphi(\mathbb{N}))$.

注意到 A 为不可数集且 $\varphi(\mathbb{N})$ 为可数集. 故

$A - \varphi(\mathbb{N})$ 为不可数集. (若 $A - \varphi(\mathbb{N})$ 为可数集或有限集. 则可数集无交并上有限集或不可数集仍为可数集). $\square$

g) PROOF:

由于 A 为不可数集. $\exists$ A 之可数子集 B_1. 使得 $A-B_1$ 仍不可数.

由于 $A-B_1$ 为不可数集. $\exists$ $A-B_1$ 之可数子集 B_2

下面我们来证明

$$|A-B_1| = |A|.$$

注意到

$$\begin{aligned} A &= (A-B_1) \sqcup B_1 \\ &= ((A-B_1)-B_2) \sqcup B_2 \sqcup B_1 \end{aligned}$$

且

$$A-B_1 = ((A-B_1)-B_2) \sqcup B_2.$$

我们只需要证明

$$|B_2 \sqcup B_1| = |B_2|.$$

由于 B_1 和 B_2 均为可数集. 基于 e) 之结论. 可得

$$|B_2 \sqcup B_1| = |B_2|.$$

证毕. $\square$

h).

在这里参考答案中的证明中，我们没有任何地方使用了选择公理(AC).

如果你们的证明中使用了选择公理，没有关系的。因为大部分现代数学是建立在 ZFC 公理体系上的.